Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

1. előadás

Előző félévek összefoglalva:

- sorozatok határértéke
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (egyváltozós függvények)
    - függvény határértéke
    - függvény folytonossága
    - függvény deriváltja
    - függvény integrálja

Ebben a félévben:

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad n, m \geq 1$, úgynevetett többváltozós függvények analíziséről lesz szó

Emlékeztető

$(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatnak $\propto \in \mathbb{R}$ a határértéke, ha $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n - \alpha| < \varepsilon$

Kell beszélnünk még a távolságról:
Például:
$x, y \in \mathbb{R}^2$, ekkor $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad x = (x_1, x_2) \;\; y = (y_1, y_2)$

Tulajdonságai

1.) $\rho(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}^2$
2.) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3.) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ (szimmetria)
4.) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \;\; \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ (háromszög egyenlőtlenség)

Metrikus tér

Legyen $M \neq \emptyset$ halmaz. Az (M, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ és

1.) $\rho(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in M$
2.) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3.) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \; \forall x, y \in M$ (szimmetria)
4.) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \;\; \forall x, y, z \in M$ (háromszög egyenlőtlenség)

ρ a metrika, $\rho(x, y)$ az x és y távolsága.

Euklideszi metrika

$\rho(x,y) \coloneqq \rho_2(x,y) \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ euklideszi metrika, ahol $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Tétel: $(\mathbb{R}^n, \rho)$ metrikus tér

Bizonyítás:

1.) $\rho(x,y) \geq 0$ - a képletben szereplő négyzetre emelés miatt teljesül
2.) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$ - az első állítást figyelembe véve $x_i = y_i$ esetben lehetséges, ám ennek minden $i = 1, \dots, n$ esetén teljesülnie kell. Ekkor pedig az $x = y$
3.) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ – a négyzetre emelés miatt, mindegy, hogy $x_i - y_i$ vagy $y_i - x_i$-t írunk a képletbe.
4.) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ (háromszög egyenlőtlenség)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad ?$$

Cauchy-Bunyakovszkij lemma:

$a_i, b_i \in \mathbb{R}^n \;\; i = 1, \dots, n$ Ekkor $|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \;\; {=}\!\!\iff$

$b_i = 0 \; \forall i = 1, \dots, n$ vagy $\exists \lambda \in \mathbb{R}: a_i = \lambda b_i \;\; \forall i = 1, \dots, n$

Lemma bizonyítása:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = P(\lambda)$$

$P(\lambda) \geq 0 \Rightarrow$

1. $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0 \Rightarrow b_i = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, n$
2. $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \quad (\Delta - \text{diszkrimináns}) \rightarrow$ legfeljebb 1 gyöke van

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$= \Longleftrightarrow \ \Delta = 0 \ \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}: P(\lambda) = 0 \ \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}: a_i = \lambda b_i \ \ \forall i = 1, \dots, n$$

$\blacksquare$