Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

2. előadás

Bevezető a normált térhez

$(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ metrikus térben a távolság mellett léteznek műveletek $(+, \lambda\,\cdot)$ (összeadás, skalárral szorzás) és létezik hossz. $x = (x_1, x_2)$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (hossz)

$\|x\|_2$ tulajdonságai:

- $\|x\|_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
- $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

Normált tér

$(X, \|.\|)$ normált-tér, ha

1.) X lineáris vektortér $\mathbb{R}$ felett
2.) $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ és
   a. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$
   b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   c. $\|x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X$
   d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

Tétel: $(X, \|.\|)$ normált-tér, ekkor (X, ρ) metrikus tér, ahol $\rho(x, y) := \|x - y\|$

Megjegyzés: $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ normált-tér $\Rightarrow \rho_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Speciális eset: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Állítás: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér .
Bizonyítás: metrikus térhez hasonlóan, csak a háromszög egyenlőtlenséget a
$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ kiindulásból kell levezetni.

Ezek után a $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$-vel foglalkozunk! $\|.\|_2$- az euklideszi norma

Megjegyzés: $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Környezet fogalma:

Definíció: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér, $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ $K_r(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - a\|_2 < r\}$ az a r-sugarú környezete, vagy az a közepű r-sugarú nyílt gömb.

Példák:
$n = 1 \quad K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < r\}$

$n = 2 \quad a = (0{,}0), r = 1 \quad K_1(0{,}0) \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2: \|x - (0{,}0)\|_2 < 1\right\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < 1\right\}$

Korlátos halmaz:

Definíció: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, ha $\exists r > 0: H \subset K_r(0)$ $(0 \in \mathbb{R}^n)$

Konvergencia:

Definíció: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ vektorsorozat konvergens, ha $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$: $\forall \varepsilon > 0: \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0: \|a_k - \alpha\|_2 < \varepsilon$.
Jelölés: $\alpha = lim a_k$, $a_k \to \alpha$ $\quad \alpha$ a határérték. (Előfordul néha, hogy az egyenlőségre ráírják a normát.)

Definíció: Ha (a_k) nem konvergens, akkor divergens.

Tétel: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1.) (a_k) konvergens
2.) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n: \forall \varepsilon > 0: \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0 \quad a_k \in K_\varepsilon(\alpha)$
3.) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, lim\|a_k - \alpha\|_2 = 0$

Tétel: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

1.) Ha (a_k) konvergens és $lim(a_k) = \alpha$, akkor
   a. α egyértelmű
   b. α korlátos
   c. $\forall \vartheta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ index-sorozatra $lim\ a_{\vartheta(k)} = \alpha$
2.) ϑ_1 és ϑ_2 index-sorozat, ha $lim\ a_{\vartheta_1(k)} \neq lim\ a_{\vartheta_2(k)}$, akkor (a_k) divergens
(Bizonyítás ugyan az, mint valós esetben.)

<u>Tétel (műveletek)</u>: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k), (b_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergensek $\alpha = \lim a_k$, $\beta = \lim b_k$. Ekkor:

1.) $(a_k + b_k)$ konvergens és $lim(a_k + b_k) = \alpha + \beta$
2.) (λa_k) konvergens és $lim(\lambda a_k) = \lambda \cdot \alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R})$