Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

3. előadás

Lemma: $\max_{i=1\dots n}|x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\max_{i=1\dots n}|x_i| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left(x = (x_1, \dots, x_n)\right)$

Bizonyítás:

- balról:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \geq \sqrt{|x_i|} = |x_i|_{i=1\dots n} \Longrightarrow \|x\|_2 \geq \max_{i=1\dots n}|x_i|$$

- jobbról:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|\max_{i=1\dots n}|x_i|\right|^2} = \sqrt{n\left|\max_{i=1\dots n}|x_i|\right|^2} = \sqrt{n}\max_{i=1\dots n}|x_i| \ \blacksquare$$

Megjegyzés:

- $\max_{i=1\dots n}|x_i| \coloneqq \|x\|_\infty$ is norma
- **Ezentúl $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_2$, ha $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$**

Tétel: (Sorozatok és koordináta sorozatok konvergenciája)

$(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$
$\alpha = \left(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$

Bizonyítás:

- "$\Longrightarrow$"
Tegyük fel, hogy $\lim a_k = \alpha \Longrightarrow \|\lim a_k - \alpha\|_2 = 0 \Longrightarrow \|a_k - \alpha\|_2 \to 0$
De $\max_{i=1\dots n}\left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| \leq \|a_k - \alpha\|_2$ (lemma, $x = a_k - \alpha$)$\Longrightarrow$
$\max_{i=1\dots n}\left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| \to 0 \Longrightarrow \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| \to 0 \ \forall i = 1, \dots, n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$
- "$\Longleftarrow$"
Tegyük fel, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists k_i, \forall k > k_i\colon \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| < \varepsilon$
Legyen $k_* = \max_{i=1\dots n} k_i \Longrightarrow \forall i = 1, \dots, n\colon \forall \varepsilon > 0, \exists k_*, \forall k > k_*\colon \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| < \varepsilon \Longrightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_*, \forall k > k_*: \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon > 0, \exists k_*, \forall k > k_*: \max\limits_{i=1\dots n}\left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| < \varepsilon$

De $\|a_k - \alpha\|_2 \le \sqrt{n}\max\limits_{i=1\dots n}\left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right|$ a lemma miatt. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_*, \forall k > k_*: \|a_k - \alpha\|_2 \le \sqrt{n}\varepsilon \Rightarrow \lim a_k = \alpha$ ■

Cauchy-sorozatok

Emlékeztető: $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: |a_k - a_l| < \varepsilon$

Definíció: $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \|a_k - a_l\| < \varepsilon$

Tétel: $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy-sorozat

Bizonyítás:

- "$\Rightarrow$"

  Tegyük fel, hogy (a_k) sorozat konvergens és $\lim a_k = \alpha \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \|a_k - \alpha\| < \varepsilon$$

  Legyen $l > k_0: \|a_l - \alpha\| < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \|a_k - a_l\| < \varepsilon \le$

  $$\le \|a_k - \alpha - (a_l - \alpha)\| \le \|a_k - \alpha\| + \|a_l - \alpha\| < 2\,\varepsilon$$

- "$\Leftarrow$"

  Tegyük fel, hogy (a_k) Cauchy-sorozat $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \|a_k - a_l\| < \varepsilon$

  A lemma miatt: $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \max\limits_{i=1\dots n}\left|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\right| < \varepsilon \Rightarrow$

  $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \left|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\right| < \varepsilon\ \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \left(a_k^{(i)}\right): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

  Cauchy-sorozat $\Rightarrow \left(a_k^{(i)}\right)$ konvergens (Egy dimenzióra vonatkozó tétel – Analízis 1) $\Rightarrow$

  $$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}\right) ■$$

Megjegyzés:

- Azt is mondhatjuk, hogy $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ Banach-tér (Minden Cauchy-sorozat konvergens) vagy Teljes normált-tér.

Topológiai alapfogalmak

Definíció: $A \subset \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$ az A torlódási pontja, ha $\forall K(a)$-ra $K(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$
Jelölés: A' a torlódási pontok halmaza.

Tétel: $a \in A' \Leftrightarrow \forall K(a)\ \ K(a) \cap A$ végtelen halmaz $\Leftrightarrow \exists (a_k): \mathbb{N} \to A$ injektív, hogy $\lim a_k = a$

Definíciók:

1.) $a \in \mathbb{R}^n$ belső pontja A-nak, ha $\exists K(a) \subset A \subset \mathbb{R}^n$
2.) A nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont
3.) A zárt halmaz, ha az $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt halmaz
4.) $\bar{A} = A \cup A'$ az A lezártja

Tétel: (Zárt halmazok jellemzése)

1.) $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow A' \subset A$
2.) $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow$ $\forall (a_k): \mathbb{N} \to A$ és konvergens sorozatra $\lim a_k = \alpha \in A$

Bizonyítás: Ugyan az, mint $\mathbb{R}$-ben.