Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

4. előadás

Tétel: (Bolzano-Weierstrass)

Ha $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ korlátos, akkor kiválasztható egy $(a_k) \circ \vartheta = \left(a_{\vartheta_k}\right)$ konvergens részsorozat.
Megjegyzés: $\vartheta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, azaz szigorúan monoton növő.

Bizonyítás:

(a_k) korlátos $\Longrightarrow \exists r > 0: a_k \in K_r(0) \Longrightarrow \|a_k\|_{(2)} < r \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.
De $\max_{i=1,\dots,n}\left|a_k^{(i)}\right| \le \|a_k\|$, ahol $a_k = \left(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \left|a_k^{(i)}\right| < r \ \ \forall i, k \ \Longrightarrow \left(a_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}\right)$ korlátos $\forall i = 1, \dots, n$
$a_k^{(i)}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos $\Longrightarrow$ alkalmazható az egyváltozós Bolzano-Weierstrass tétel $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists\left(a_k^{(1)}\right) \circ \vartheta_1$ konvergens $\Longrightarrow$ $\left(a_k^{(2)}\right) \circ \vartheta_1$ korlátos, Bolzano-Weierstrass tétel $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists\left(a_k^{(2)}\right) \circ \vartheta_1 \circ \vartheta_2$ konvergens részsorozat $\Longrightarrow \left(a_k^{(3)}\right) \circ \vartheta_1 \circ \vartheta_2$ korlátos $\Longrightarrow \dots \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists\left(a_k^{(n)}\right) \circ \vartheta_1 \circ \dots \circ \vartheta_n$ konvergens részsorozat $\Longrightarrow \left(a_k^{(i)}\right) \circ \vartheta_1 \circ \dots \circ \vartheta_n$ konvergens
$\forall i = 1, \dots, n \ \Longrightarrow \ (a_k) \circ \vartheta_1 \circ \dots \circ \vartheta_n$ konvergens (régebbi tétel…) ■

Függvények határértéke, folytonossága

Definíció: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ (n, m \ge 1) \quad a \in D_f'$ f-nek $\exists$ határértéke, ha $\exists A \in \mathbb{R}^m$,
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in K_\delta(a) \backslash \{a\} \cap D_f: f(x) \in K_\varepsilon(A) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < \|x - a\| < \delta: \|f(x) - A\| < \varepsilon$

Definíció: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f: f(x) \in K_\varepsilon\big(f(a)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in D_f: \|x - a\| < \delta: \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Jelölések: $\lim_a f = A \quad f \in C(a)$

Állítás: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Ekkor $\lim_a f = A \ \Leftrightarrow \ \tilde{f} \in C(a)$, ahol

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x): x \in D_f, & x \ne a \\ \quad A \quad , & x = a \end{cases}$$

Tétel: (Átviteli elv folytonosságra)

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in D_f$.Ekkor $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_k): \mathbb{N} \to D_f: lim(x_k) = a: lim\big(f(x_k)\big) = f(a)$

Megjegyzések: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- $n = m = 1$ valós-valós függvény
- $m = 1$ valós értékű függvény
- $n, m > 1$ vektor-vektor függvény

<u>Definíció</u>:

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, akkor $f(x) \in \mathbb{R}^m \ \forall x \in D_f$. Legyen $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m$. Az f_i függvényeket koordináta függvényeknek nevezzük.

Megjegyzés:
$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C(a) \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

<u>Tétel</u>: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in D_f$ Ekkor $f \in C(a) \Leftrightarrow \ f_i \in C(a) \ \forall i = 1, \dots, m$

<u>Bizonyítás</u>:

- "$\Longrightarrow$"
  Tegyük fel, hogy $f \in C(a) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta :$
  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ De $\max_{i=1,\dots,m} |f_i(x) - f_i(a)| \le \|f(x) - f(a)\| \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta : |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \ \ \forall i = 1, \dots, m \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow f_i \in C(a) \ \forall i = 1, \dots, m$
- "$\Longleftarrow$"
  Tegyük fel, hogy $f_i \in C(a) \ \forall i = 1, \dots, m \Longrightarrow \forall i = 1, \dots, m \ \ \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_i > 0,$
  $\forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta_i : |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$
  Legyen $\delta_* := \min_{i=1,\dots,m} \delta_i \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_* > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta_* :$
  $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \ \ \forall i = 1, \dots, m \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_* > 0, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta_* :$
  $\max\limits_{i=1,\dots,m} |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$
  De $\|f(x) - f(a)\| \le \sqrt{m} \ \max_{i=1,\dots,m} |f_i(x) - f_i(a)| \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_* > 0, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \delta_* : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon\sqrt{m} \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow f \in C(a)$ ■

<u>Tétel</u>: $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad a \in D_f \cap D_g, \ f, g \in C(a)$. Ekkor

- $f + g \in C(a)$
- $\lambda f \in C(a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ha $m = 1$, akkor $f \cdot g \in C(a)$
- ha $m = 1$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C(a)$

<u>Definíció</u>: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, A \subset D_f$ Ekkor f folytonos A-n, ha $f \in C(a), \forall a \in A$
Jelölés: $f \in C(A)$