Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

5. előadás

Korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvények

Tétel: Ha $f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ folytonos és D_f korlátos és zárt, akkor R_f is korlátos és zárt.

Bizonyítás:
Igazoljuk először, hogy R_f zárt. Legyen $(y_n): \mathbb{N} \to R_f$ konvergens. Ekkor $lim\, y_n \in R_f$.
Mivel $y_n \in R_f: \exists x_n \in D_f$, hogy $f(x_n) = y_n \Longrightarrow (x_n): \mathbb{N} \to D_f$
D_f korlátos $\Longrightarrow (x_n)$ korlátos, Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists \left(x_{\vartheta_n}\right)$ konvergens részsorozat.
Legyen $x_0 = \lim x_{\vartheta_n}$. D_f zárt, $\left(x_{\vartheta_n}\right)$ konvergens $\Longrightarrow x_0 = \lim x_{\vartheta_n} \in D_f$.
Az átviteli elv miatt $f(x_0) = \lim f\left(x_{\vartheta_n}\right)$. Legyen $y_0 = f(x_0) \Longrightarrow y_0 \in R_f$ és
$y_0 = f(x_0) = \lim f\left(x_{\vartheta_n}\right) = \lim y_{\vartheta_n}$. De $\lim y_{\vartheta_n} = \lim y_n$, mert y_n konvergens $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow y_0 = \lim y_n \in R_f \Longrightarrow R_f$ zárt.

Most igazoljuk, hogy R_f korlátos, azaz $\exists r > 0, \forall y \in R_f: \|y\| < r$
Indirekten tegyük fel, a korlátosság definícióját, ekkor $\forall r > 0, \exists y \in R_f: \|y\| > r$.
Legyen $r = n: \forall n \in \mathbb{N}: \exists y_n \in R_f: \|y_n\| > r \Longrightarrow: \exists x_n \in D_f: y_n = f(x_n) \Longrightarrow (x_n): \mathbb{N} \to D_f$
D_f korlátos, Bolzano-Weierstrass tétel $\Longrightarrow \exists \left(x_{\vartheta_n}\right)$ konvergens részsorozat.
Lengyen $x_0 = \lim x_{\vartheta_n}$, D_f zárt $\Longrightarrow x_0 \in D_f \Longrightarrow f(x_0) = \lim f\left(x_{\vartheta_n}\right) = \lim y_{\vartheta_n} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \left(y_{\vartheta_n}\right)$konvergens $\Longrightarrow \left(y_{\vartheta_n}\right)$ korlátos. Ez pedig ellentmondás, mivel $\left\|y_{\vartheta_n}\right\| > \vartheta_n$, azaz
y_{ϑ_n} nem korlátos. ■

Tétel (Weierstrass-tétel): Ha $f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ folytonos, D_f korlátos és zárt, akkor $\exists maxf, \exists minf$

Bizonyítás
R_f korlátos $\Longrightarrow M = supR_f < \infty$. A suptulajdonság miatt
$\forall n \in \mathbb{N}: \exists y \in R_f, M - \frac{1}{n} < y_n \leq M \Longrightarrow limy_n = M$. De R_f zárt is, $(y_n): \mathbb{N} \to R_f$
konvergens $\Longrightarrow M = limy_n \in R_f \Longrightarrow M = maxR_f = maxf$ ■
Minimumra hasonlóan.

Tétel: Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos, D_f korlátos és zárt és f injektív, akkor f^{-1} folytonos

Egyenletes folytonosság fogalma

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \ x \in D_f$, ekkor

a) $f \in C(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall y \in D_f: \|x - y\| < \delta: \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$
b) $f \in C \Leftrightarrow f \in C(x)\ \forall x \in D_f \ \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall y \in D_f: \|x - y\| < \delta: \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Definíció (Egyenletes folytonosság):
$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egyenletesen folytonos, ha
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x, y \in D_f: \|x - y\| < \delta: \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Tétel: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és f egyenletesen folytonos $\Longrightarrow f$ folytonos.
Megjegyzés: A tétel vissza fele nem igaz. Például: $f(x) = \frac{1}{x} \ \ x \in (0,1)$ - folytonos, de nem egyenletesen folytonos.

Tétel (Heine-tétel): Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos, D_f korlátos és zárt, akkor f egyenletesen folytonos.

Banach-féle fixponttétel

Definíció: $X \subset \mathbb{R}^n, f: X \to X$. Ekkor $x^* \in X$ fixpontja f-nek, ha $f(x^*) = x^*$

Definíció: $X \subset \mathbb{R}^n, f: X \to X$ kontrakció, ha $\exists 0 \leq q < 1: \|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$: $\forall x, y \in X$

Állítás: Ha f kontrakció, akkor f folytonos is
Bizonyítás: $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ az előző egyenlőtlenség miatt.

Tétel (Banach-féle fixponttétel): $X \subset \mathbb{R}^n, f: X \to X$ kontrakció, X zárt. Ekkor

1.) f-nek $\exists!$ fixpontja, azaz $\exists!\, x^* \in X: f(x^*) = x^*$
2.) Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, $x_{n+1} := f(x_n)$, akkor az $(x_n): \mathbb{N} \to X$ konvergens és $\lim x_n = x^*$
3.) $\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|, n \in \mathbb{N}$

Megjegyzés: Ha $X \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Longrightarrow$ Banach-tér