Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

6. előadás

Differenciálszámítás

Emlékeztető:

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in intD_f \quad f \in D(a) \quad \Leftrightarrow \ \exists \text{ és } véges \ \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \exists A \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h} = 0. Ekkor \ \ A = f'(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \exists A \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-Ah|}{|h|} = 0. Ekkor \ \ A = f'(a) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \exists A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h, A = f'(a)$$

Megjegyzés: Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, akkor A lineáris leképezés lesz.

Definíció: $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, ha $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jelölés: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Mátrix-reprezentáció

Legyen $e_1, \dots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, azaz $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (i. helyen 1-es). Ekkor

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

$$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m): L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n L\left(x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L\left(e_j\right)$$

$$L\left(e_j\right) \in \mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists a_{i,j} \in \mathbb{R}: L\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \Longrightarrow L(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j L\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{i,j} f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) f_i \Longrightarrow L(x) \in \mathbb{R}^m \ i-edik \ koordinátája \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \, .$$

Legyen $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ekkor $A \cdot x$ i-edik koordinátája: $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \ \Longrightarrow L(x) = A \cdot x$, azaz L és A azonosítható.

Tétel: Az L lineáris leképezés azonosítható az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix-szal.

Definíció: Az $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operátornormája: $\left|\left|\left|L\right|\right|\right| := sup\{|L(h)|: \|h\| \leq 1\}$

Tétel: $|L(h)| \leq \left|||L||\right| \cdot \|h\|, h \in \mathbb{R}^n$

Derivált:

- (totális) derivált
- parciális derivált
- iránymenti derivált

Definíció:

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deriválható az $a \in intD_f$ pontban, ha $\exists L \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Tétel (ekvivalens átfogalmazás):
$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_f \;\; f \in D(a) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \;\exists L \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \exists \varepsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0: f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$
Ekkor $L = \; f'(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \;\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} = 0.$ Ekkor $A = \; f'(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \;\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \exists \varepsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim\limits_0 \varepsilon = 0: f(a+h) - f(a) = A(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$

Bizonyítás

$(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n: a_k \to a \Leftrightarrow \|a_k - a\| \to 0 \;\; a_k \to 0 \;\Leftrightarrow \|a_k\| \;\to 0$
$$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists L: \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\exists L: \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 \coloneqq \varepsilon(h)$$

Például:
$$f = c \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^m: \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \Rightarrow L = f'(a) = c$$

Tétel: A derivált egyértelmű