Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

7. előadás

Emlékeztető:

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_f, f \in D(a) \Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\colon \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|}^{(\mathbb{R}^m)}}{\underbrace{\|h\|}_{(\mathbb{R}^n)}}$

Példa:

$f = c \in \mathbb{R}^m\colon \lim_{h\to 0} \frac{\|c-c-L(h)\|}{\|h\|} = 0$. Legyen $k = L \cdot e$, ahol e egységelem $\|e\| = 1$

$h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0, t \in \mathbb{R}\colon \|h\| \to 0 \;\Leftrightarrow \|te\| = \|t\| \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|L(te)\|}{\|te\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t| \cdot \|L(e)\|}{|t| \cdot \|e\|} = \lim_{t\to 0} \|L(e)\| = 0 \Longrightarrow L(e) = 0$$

Ha tetszőleges $x \neq 0$, akkor $\frac{x}{\|x\|}$ egységvektor $\Longrightarrow L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\|x\|} L(x) = 0 \Longrightarrow L(x) = 0 \Rightarrow L \equiv 0$

Állítás: $n = m = 1$. Ekkor $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow L(x) = cx, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

Példa:

$f = L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$(m = n = 1 \;\; L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), L \leftrightarrow c \;\; c \in \mathbb{R} \;\; L(x) = cx, \;\; (cx)' = c \quad c \leftrightarrow L \Longrightarrow L'(a) = L)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(a+h) - L(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 \Longrightarrow L(a+h) = L(a) + L(h) \Longrightarrow L^{'}(a) = L$$

Tétel (folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata):

$f \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), a \in intD_f$ Ekkor

1.) $f \in D(a) \Longrightarrow f \in C(a)$
2.) $f \in D(a) \;\not\Leftarrow\; f \in C(a)$

Bizonyítás:

1.) $f \in D(a) \Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \exists \varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0$:
$f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$
$\|f(a+h) - f(a)\| = \big\|L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|\big\| \leq \|L(h)\| + \big\|\varepsilon(h) \cdot \|h\|\big\| \leq$
$\leq \Big|\|L\|\Big| \cdot \|h\| + \|h\| \cdot \|\varepsilon(h)\| \to 0 \;\; \Longrightarrow f \in C(a)$
2.) Például: $f(x) = |x|\,, n = m = 1$

Tétel: $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in int\big(D_f \cap D_g\big),\ f, g \in D(a)$. Ekkor

1.) $f + g \in D(a)$ és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2.) $\lambda \in \mathbb{R}: \lambda f \in D(a)$ és $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

Tétel: $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_g, g \in D(a), f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, f \in D\big(g(a)\big), R_g \subset D_f$.
Ekkor $f \circ g \in D(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$

Megjegyzés: $f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \Longrightarrow (f \circ g)'(a) \in \mathbb{R}^{k \times n}$
$f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \Longrightarrow f'\big(g(a)\big) \in \mathbb{R}^{k \times m}$
$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Longrightarrow g'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Tétel:

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_f\ \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, f_i$ koordináta függvény.

Ekkor $f \in D(a) \Longleftrightarrow f_i \in D(a)\ \ i = 1, \dots, n$ és $f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}$

Definíció: (Parciális deriválás)

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in intD_f$. Legyen $F(t) = f(a + t \cdot e_i), t \in K(0) \subset \mathbb{R}$
$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (i. helyen 1-es). Ekkor f-nek létezik a parciális deriváltja az i-edik változó szerint az a pontban, ha $F \in D(0)\ \ (F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. A parciális derivált: $F'(0)$.
Jelölés: $\partial_i f(a) = F'(0)$

Megjegyzés:

$$\partial_i f(a) = \big(t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+t}, a_{i+1}, \dots, a_n)\big)'|_{t=0}$$
$$\partial_i f(a) = \big(x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\big)'|_{x_i = a_i}$$

Például:
$f(x, y) = x^2 y^3 \quad a = (2,3)$

$$\partial_1 f(2,3) = \big(t \mapsto f(2+t, 3)\big)'|_{t=0} = ((2+t)^2 27)'|_{t=0} = 4 \cdot 27 = 108$$
$$\partial_1 f(2,3) = (x \mapsto x^2 27)'|_{x=2} = 4 \cdot 27 = 108$$
$$\partial_2 f(2,3) = (y \mapsto 4y^3)'|_{y=3} = 4 \cdot 27 = 108$$