Analízis 3

Filipp Zoltán gyakorlata alapján
Készítette: Nagy Krisztián

1. gyakorlat

Határozatlan integrál, primitív függvény keresés

Ismétlés
Definíció: $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$. Ha $\exists F: I \to \mathbb{R}$ $F \in D$ és $F'(x) = f(x), \forall x \in I \Longrightarrow$ F a f **primitív függvénye**.

1. feladat: Legyen $f(x) \coloneqq x^2$ $(x \in \mathbb{R} = I)$. Mi az $f(x)$ primitív függvénye?

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

Tehát például $F(x) \coloneqq \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$ egy primitív függvénye az $f(x)$-nek.

A fentebbi módszert felhasznélva például

$$\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$$

Tehát az az $F_1(x) \coloneqq \frac{x^3}{3} + 2, x \in \mathbb{R}$ is egy primitív függvénye az $f(x)$-nek.
Tovább folytatva: $F_c(x) \coloneqq \frac{x^3}{3} + c, (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$ lefedi az összes primitív függvényét az $f(x)$-nek. A konstans érték (c) bármilyen választható valós érték lehet, csak ebben térhetünk el.

Lehetséges feladat, hogy adjuk meg azt a primitív függvény, melyre $F(1) = 8$
Ennek megoldása a következő: $F(1) = \frac{1^3}{3} + c = 8 \Longrightarrow c = \frac{23}{3}$
Tehát $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{23}{3}$ $(x \in \mathbb{R})$ a keresett primitív függvény.

Határozatlan integrál: $\int f \coloneqq \int f(x)dx \coloneqq \{F: I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\} =$

$\{F(x) + c \mid x \in I, c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$ $(x \in I, c \in \mathbb{R})$

Megjegyzés: I az f függvény értelmezési tartománya.
Összességében tehát a határozatlan integrál f összes primitív függvényének a halmaza.

Fentebbi példánk esetén: $\int_{(x \in \mathbb{R})} x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ $(x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$

2. feladat: Van-e minden függvénynek határozatlan integrálja/primitív függvénye?

Válasz: Nincs minden függvénynek.
Legegyszerűbb ellenpélda a lépcsős függvények.
Például: $f(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 \le x < 2 \end{cases} \qquad (x \in I \coloneqq (0,2))$

Ha $\exists F$ primitív függvény $\Longrightarrow F \in D$ és $F' = f$ = Darboux-tulajdonságú lenne (ld. F' derivált függvény tulajdonságai) „Minden pontban felveszi az értékét”. Ebben az esetben pedig ez nem teljesül. Például: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, f(1) = 2, de \nexists t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : f(t) = \frac{3}{2} \Longrightarrow f$-nek nincs primitív függvénye. Tehát $\int f = \emptyset$

3. feladat: $\int_{(x \in \mathbb{R})} (sinx + 3e^2)dx = ?$
Megoldás:

$$\int_{(x \in \mathbb{R})} (sinx + 3e^2)dx = \int sinx\, dx + 3 \int e^x dx = -cosx + 3e^x + c \; (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

<u>Alapintegrálok és ezekre vezetés</u>

4. feladat:

$$\int \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x} dx = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} dx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}\right) dx =$$
$$= \int \frac{1}{cos^2x} dx + \int \frac{1}{sin^2x} dx = tgx - ctgx + c; x \in I \coloneqq \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

5. feladat:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$
$$= x - arctgx + c; \; (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Emlékeztető: $arctg'x = \frac{1}{1+x^2}$

6. feladat:

$$\int (x^2 + x - 1)dx = \int x^2 dx + \int x dx - \int 1dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c \;\; (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

7. feladat:

$$\int \sqrt[3]{x} \cdot x dx = \int x^{\frac{1}{3}} \cdot x\, dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{7} \cdot \sqrt[3]{x^7} + c \; (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

<u>Szabály – hatvány függvény határozatlan integrálja</u>

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \;\; (x \in I, c \in \mathbb{R}) \;\; \forall \alpha \neq 1$$

8. feladat:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx=\int x^{-2}dx+\int x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}dx=$$

$$=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}}+c=-\frac{1}{x}+\frac{8}{15}\cdot\sqrt[8]{x^{15}}+c\quad I:=(0,+\infty)\quad(c\in\mathbb{R},x>0)$$

9. feladat:

$$\int\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^4+2x^2+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^{4-\frac{1}{2}}+2x^{2-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\int x^{\frac{7}{2}}dx+2\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x}+c\quad(c\in\mathbb{R},x>0)$$

10. feladat:

$$\int\frac{1}{x}dx=lnx+c\quad(c\in\mathbb{R})\quad\leftrightsquigarrow\quad(lnx)'=\frac{1}{x}$$

$x\in(0,+\infty)$ Ez a hatványfüggvény $\propto=-1$ esete.

11. feladat:

$$\int\frac{1}{x}dx=ln(-x)+c\quad(c\in\mathbb{R},x<0)\quad\leftrightsquigarrow\quad\big(ln(-x)\big)'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}\quad x\in(-\infty,0)$$

<u>Szabály – 1/x határozatlan integrálja</u>

$$\int\frac{1}{x}dx=ln|x|+c\quad x\in I,c\in\mathbb{R}$$

Megjegyzés: $(x>0\rightarrow+\,,x<0\rightarrow-)$

12. feladat:

$$\int sin(2x)dx=-\frac{cos(2x)}{2}+c$$

$$\int sinxdx=-cosx+c$$

$$\big(-cos(2x)\big)'=+sin(2x)\cdot 2$$

13. feladat:

$$\int e^{1-3x}dx = \frac{e^{1-3x}}{-3} + c$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + c$$

14. feladat:

$$\int (2x+1)^{100}dx = \frac{(2x+1)^{101}}{101} \cdot \frac{1}{2} + c \ \ (x, c \in \mathbb{R})$$

$$\int x^{100}dx = \frac{x^{101}}{101} + c \ \ (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

<u>**Szabály – Lineáris helyettesítés**</u>

Tegyük fel, hogy $\int f \neq \emptyset$ és $\int f(x)dx = F(x) + c \Longrightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

$x \in I \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \in \mathbb{R}$

15. feladat:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{5x+7}}dx = \int (5x+7)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{(5x+7)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{5} + c = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(5x+7)^2} + c$$

$x \in I \coloneqq \left(-\frac{7}{5}, +\infty\right) \ \ c \in \mathbb{R}$

$$\int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

16. feladat:

$$\int sin^2 x dx = Linearizálás = \int \frac{1-cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \int cos2xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right) + c \quad (x, c \in \mathbb{R})$$

Fontos összefüggések:

$$\left.\begin{aligned} sin^2 x + cos^2 x &= 1 \\ cos^2 x - sin^2 x &= cos2x \end{aligned}\right\}$$

Amennyiben az elsőből kivonjuk a másodikat: $sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$

Amennyiben összeadjuk a két egyenletet: $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$

A fentebbi formulákat **fokszám csökkentési képleteknek** nevezzük.

17. feladat:

$$\int \frac{1}{1+cosx}dx = \int \frac{1}{2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c = tg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\left(c \in \mathbb{R}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Itt az első lépésben a $1 + cosx = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ úgynevezett kvadratizáló formulát használtuk.

<u>Ajánlott irodalom</u>:

- Gyemidovics: Analízis feladatgyűjtemény
- Bolyai-sorozat: Integrálszámítás (kidolgozott példák)
- Károlyi Katalin - feladatok