Analízis 3

Filipp Zoltán gyakorlata alapján
Készítette: Nagy Krisztián

2. gyakorlat

$$\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c & , \quad \alpha \neq -1 \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)|+c & , \quad \alpha = -1 \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Megjegyzések:

$$\left(\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)f^{\alpha}(x)f'(x)$$

Ha $f(x) > 0 \implies \left(ln\big(f(x)\big)\right)' = \frac{1}{f(x)}f'(x)$

1. feladat:

$$\int (x^2+1)(x^3+3x)^{2014}dx = \frac{1}{3}\int (3x^2+3)(x^3+3x)^{2014}dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3x)'(x^3+3x)^{2014}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+3x)^{2015}}{2015}+c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Megjegyzés: $\alpha = 2014, f = x^3+3x, itt\ f' = 3x^2+3$ választásokkal indultunk el.

2. feladat:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int (2x)(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)'\,(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Megjegyzés: $\alpha = -\frac{1}{3}, f = x^2+1, itt\ f' = 2x$ választásokkal indultunk el. Továbbá, ha a számlálóban nem állna x, akkor nem lehetne megoldani a fentebbi képlettel.

3. feladat:

$$\int \frac{ln^7x}{x}dx = \int (lnx)'(lnx)^7dx = \frac{(lnx)^8}{8}+c \quad (x > 0, c \in \mathbb{R})$$

4. feladat:

$$\int sin^3x\,dx = \int sin^2x \cdot sinx\,dx = \int sin^2x(-cosx)'\,dx = -\int (1-cos^2x)(cosx)'\,dx =$$
$$= -\int (cosx)' + \int cos^2x(cosx)'dx = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Megjegyzés: sin/cos típusoknál, ha van páratlan 1-et leválasztunk és jó esetben a trigonometrikus Pithagorasz-tételt alkalmazva átalakítjuk, majd szétbontás után egyszerűen megoldjuk az integrált felhasználva az $\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx$ -re tanult formulát.

5. feladat:

$$\int cos^5x \cdot sin^4x\,dx = \int cosx \cdot cos^4x \cdot sin^4x\,dx = \int (sinx)'(1-sin^2x)^2 \cdot sin^4x\,dx =$$
$$= \int (sinx)'(1-2sin^2x+sin^4x)sin^4x\,dx =$$
$$= \int (sinx)'\,sin^4x\,dx - 2\int\int (sinx)'\,sin^6x\,dx + \int\int (sinx)'\,sin^8x\,dx =$$
$$= \frac{sin^5x}{5} - 2\frac{sin^7x}{7} + \frac{sin^9x}{9} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

6. feladat:

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt{sinx}}dx = \int cosx \cdot \frac{1-sin^2x}{\sqrt{sinx}}dx = \int (sinx)'\,(sinx)^{-\frac{1}{2}}dx - \int (sinx)'\,(sinx)^{2-\frac{1}{2}}dx =$$
$$= \frac{(sinx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(sinx)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{sinx} - \frac{2}{5}\sqrt{sin^5x} + c \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (0,\pi) = I)$$

7. feladat:

$$\int sin^4x\,dx = \int (sin^2x)^2dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2cos2x+cos^2x)dx =$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{2}{4}\cdot\frac{sin2x}{2} + \frac{1}{4}\int cos^2 2x\,dx = \frac{x}{4} - \frac{2}{4}\cdot\frac{sin2x}{2} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+cos4x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{2}{4}\cdot\frac{sin2x}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{sin4x}{4} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

8. feladat:

$$\int sin^4x\, cos^2x\, dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+cos2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-2cos2x+cos^2 2x)(1+cos2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+cos2x-2cos2x-2cos^2 2x+cos^2 2x+cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-cos2x-cos^2 2x+cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{sin2x}{2\cdot 8} - \frac{1}{8}\int cos^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int cos^3 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{sin2x}{2\cdot 8} - \frac{1}{8}\int \left(\frac{1+cos4x}{2}\right) dx + \frac{1}{8}\int cos^3 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{sin2x}{16} - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{sin4x}{4} + \frac{1}{8}\int cos^3 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin2x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{1}{8}\int cos^2 2x \cdot cos2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin2x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{1}{8}\int cos^2 2x \cdot cos2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin2x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{1}{8}\int \left(\frac{sin2x}{2}\right)' (1-sin^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin2x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{1}{16}\int (sin2x)'\, dx - \frac{1}{16}\int (sin2x)'(sin2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin2x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{sin2x}{16} - \frac{1}{16}\cdot\frac{(sin2x)^3}{3} + c =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Páratlan kitevős sin/cos szorzatára vonatkozó szabály

$\int sin^n x \cdot cos^m x\, dx$ típusú határozatlan integrálok esetén:
Ha n és m közt van páratlan, akkor leválasztunk egyet a páratlan kitevős tényezőből és az $\int f'(x) f^\alpha(x)\, dx$ szabályt alkalmazzuk (úgy, hogy a leválasztott tényezőt helyettesítjük azzal, hogy minek a deriváltja.)
Amennyiben n és m is páros, úgy a végsőkig linearizálunk, a formulák segítségével.

9. feladat:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+1)+c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

10. feladat:

$$\int tgx\, dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{(cosx)'}{cosx}dx = -ln(cosx)+c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = I, c \in \mathbb{R}\right)$$

11. feladat:

$$\int \frac{1}{xlnxln(lnx)}dx = \int \frac{\big(ln(lnx)\big)'}{ln(lnx)}dx = ln|n(lnx)|+c \quad (x \in (1,+\infty) = I, c \in \mathbb{R})$$

Megjegyzés: $f(x) = \ln(lnx) \quad f'(x) = \frac{1}{lnx}\cdot\frac{1}{x}$

Parciális integrálás

Tegyük fel, hogy $f, g: I \to \mathbb{R},\ \emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g \in D$ és $\int fg' \neq \emptyset$.
Ekkor $\int f'g \neq \emptyset \Longrightarrow \int f'g = fg - \int fg'$.

$$\left(\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\right)$$

12. feladat:

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'\, dx = xe^x - \int e^x(x)'\, dx = xe^x - e^x + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Szerepek: $f'(x) = e^x \to f(x) = e^x \qquad g(x) = x \Longrightarrow g'(x) = 1$

13. feladat:

$$\int x^2 sinx\, dx = \int x^2(-cosx)'dx = -x^2cosx - \int 2x(-cosx)\, dx =$$

$$= x^2cosx + 2\int xcosx\, dx = x^2cosx + 2\int x(sinx)'\, dx =$$

$$= x^2cosx + 2\left(xsinx - \int (x)'sinxdx\right) = x^2cosx + 2x\cdot sinx + 2cosx + c \ (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Polinom · $\{exp, sin, cos, sh, ch\}$ típusú függvény esetén parciális integrálást alkalmazunk, az alábbi szereposztással szereposztás

$\int P(x) \cdot h(ax+b)dx$, ahol $h \in \{exp, sin, cos, sh, ch\}$ és P polinom, akkor a parciális integrálás során használt szereposztás (f, f', g, g') a következő:
$g := P \quad f' := h(ax+b)$

14. feladat:

$$\int lnx\,dx = \int 1 \cdot lnx\,dx = \int (x)' lnx\,dx = xlnx - \int x(lnx)'dx =$$
$$= xlnx - \int 1\,dx = xlnx - x + c \qquad (x \in (1,+\infty) = I, c \in \mathbb{R})$$

15. feladat:

$$\int arctg(2x)dx = \int 1 \cdot arctg(2x)dx = xarctg(2x) - \int x\big(arctg(2x)\big)'dx =$$
$$= xarctg(2x) - \int x\frac{1}{1+4x^2} \cdot 2dx = xarctg(2x) - 2\int \frac{x}{1+4x^2}dx =$$
$$= xarctg(2x) - \frac{1}{4}\int \frac{8x}{1+4x^2}dx = xarctg(2x) - \frac{1}{4}\int \frac{(1+4x^2)'}{1+4x^2}dx =$$
$$= xarctg(2x) - \frac{1}{4}ln(1+4x^2) + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Inverz-függvények integrálása

Az integrálban egyedül szereplő inverzfügvény (például: ln, arkusz-függvények) készítsünk szorzatot oly módon, hogy vegyünk be egy 1-est a szorzat első tényezőjeként, majd íly módon alkalmazzuk a parciális integrálás tételét az $f' = 1 \;\; g =$inverz függvény szereposztással.