Analízis 3

Filipp Zoltán gyakorlata alapján
Készítette: Nagy Krisztián

3. gyakorlat

1. feladat:

$$\int e^{3x} sinx\, dx = \int \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' sinx\, dx = \frac{e^{3x}}{3} sinx - \int \frac{e^{3x}}{3} (sinx)' dx =$$
$$= \frac{e^{3x}}{3} sinx - \frac{1}{3} \int e^{3x} cosx\, dx = \frac{e^{3x}}{3} sinx - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3} cosx - \int \frac{e^{3x}}{3} (cosx)' dx\right) =$$
$$= \frac{e^{3x}}{3} sinx - \frac{e^{3x}}{9} cosx - \frac{1}{9}\int e^{3x} sinx\, dx$$

Legyen $I \coloneqq \int e^{3x} sinx\, dx$, ekkor
$$I = \frac{e^{3x}}{3} sinx - \frac{e^{3x}}{9} cosx - \frac{1}{9} I \Rightarrow \frac{10}{9} I = \frac{e^{3x}}{3}\left(sinx - \frac{1}{3} cosx\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = \frac{3}{10} e^{3x} \left(sinx - \frac{1}{3} cosx\right) + c \ (x, c \in \mathbb{R})$$

Megjegyzések:

- Több parciális integrálás esetén mindig ugyan azt a tagot válasszuk deriváltnak!
- Egyenletre rendezés, abban az esetben, ha $exp \cdot \{sin, cos, sh, ch\}$ $elsőfok$ú

2. feladat:

$$\int e^{2x+1} ch(3x-1) dx = \frac{e^{2x+1}}{2} ch(3x-1) - \int \frac{e^{2x+1}}{2} \big(ch(3x-1)\big)' dx =$$

Legyen $h(x) \coloneqq \frac{e^{2x+1}}{2} ch(3x-1)$

$$= h(x) - \frac{1}{2}\int e^{2x+1}\, sh(3x-1) \cdot 3dx = h(x) - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\, sh(3x-1) dx =$$
$$= h(x) - \frac{3}{2}\left[\frac{e^{2x+1}}{2} sh(3x-1) - \int \frac{e^{2x+1}}{2} \big(sh(3x-1)\big)' dx\right] =$$
$$= h(x) - \frac{3}{4} e^{2x+1} sh(3x-1) - \frac{9}{4}\int e^{2x+1} ch(3x-1) dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ha\ A \coloneqq \int e^{2x+1} ch(3x-1) dx \ \Rightarrow A = \frac{e^{2x+1}}{2} ch(3x-1) - \frac{3}{4} e^{2x+1} sh(3x-1) - \frac{9}{4} A$$
$$\Rightarrow A = \frac{4}{13} \frac{e^{2x+1}}{2} ch(3x-1) - \frac{3}{13} e^{2x+1} sh(3x-1) + c \ (x, c \in \mathbb{R})$$

3. feladat:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}dx = \int (x)'\sqrt{1-x^2}dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + arcsinx - \int \sqrt{1-x^2}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}arcsinx + c \ \ \left(c \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)\right)$$

4. feladat:

Adjuk meg rekurzióval az alábbi integrált:

$$I_n := \int cos^n x \, dx \ \ (n \in \mathbb{N})$$

$$I_0 = \int cos^0 x \, dx = \int 1dx = x + c; \quad (x, c \in \mathbb{R})$$
$$I_1 = \int cosx \, dx = sinx + c \ (x, c \in \mathbb{R})$$
$$I_2 = \int cos^2 x \, dx = \int \frac{1+cos2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + c \ \ (x, c \in \mathbb{R})$$

$\boxed{2 \leq n}$

$$I_n = \int cos^{n-1}x \, cosx \, dx = \int cos^{n-1}x \, (sinx)'dx =$$
$$= cos^{n-1}x \, sinx - \int sinx(cos^{n-1}x)'dx =$$
$$= cos^{n-1}x \, sinx - \int sinx(n-1)cos^{n-2}x(-sinx)dx =$$
$$= cos^{n-1}x \, sinx + (n-1)\int cos^{n-2}x \, sin^2 x \, dx =$$
$$= cos^{n-1}x \, sinx + (n-1)\int cos^{n-2}x \, (1-cos^2 x)dx =$$
$$= cos^{n-1}x \, sinx + (n-1)\left(\int cos^{n-2}x \, dx - \int cos^n x \, dx\right)$$

Azaz $I_n = cos^{n-1}x \, sinx + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n}cos^{n-1}x \, sinx + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \ \ (2 \leq n \in \mathbb{N})$$
$$I_0 = x + c \ \ I_1 = sinx + c \ (x, c \in \mathbb{R})$$

Helyettesítéses integrálás

1-es helyettesítés (ismerem f primitív függvényét)
$(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g'$, ha most $F \in \int f \neq \emptyset$, azaz $F' = f \Longrightarrow (F \circ g)' = f \circ g \cdot g' \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int (F \circ g)' = \int f \circ g \cdot g' \Longrightarrow F \circ g = \int f \circ g \cdot g'$ vagy
$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x) dx = F\big(g(x)\big) + c$, ahol $F \in \int f$ egy olyan primitív függvény, amit ismerünk!
($g \in D \quad g: J \to I \quad f: I \to \mathbb{R}$)

5. feladat:

$$\int x^2 sin(x^3) dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\, sin(x^3) =$$

$$g(x) = x^3 \to g'(x) = 3x^2 \qquad f(t) = sint \Longrightarrow \int f = \int sin \coloneqq -cos$$

$$= \frac{1}{3}(-cosx^3) + c = -\frac{cosx^3}{3} + c \ \ (x, c \in \mathbb{R})$$

6. feladat:

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)' dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c\ (x, c \in \mathbb{R})$$

7. feladat – 1. megoldás:

$$\int \frac{e^{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{arcsinx} \cdot (arcsinx)' dx = e^{arcsinx} + c \ \ \big(c \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)\big)$$

7. feladat – 2. megoldás:

$$\int \frac{e^{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$g(x) = arcsinx = t \ \ | (.)'$$

$$(arcsinx)' dx = (t)' dt \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int e^{arcsinx} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =_{arcsinx=t} \int e^t \cdot 1dt|_{t=arcsinx} = e^t + c|_{t=arcsinx} =$$

$$= e^{arcsinx} + c \ \ \big(c \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)\big)$$

8. feladat:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}e^x =$$

$e^x = t \;\; \rightarrow \;\; (e^x)'dx = (t)'dt \quad \rightarrow \;\; e^x dx = dt$

$= \int \frac{t}{1+t}dt|_{t=e^x}$ itt

$$\int \frac{t}{1+t}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int 1dt - \int \frac{1}{1+t}dt = t - \int \frac{(1+t)'}{1+t}dt =$$

$= t - ln(1+t) + c$ Tehát:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = e^x - ln(1+e^x) + c \;\; (x, c \in \mathbb{R})$$

9. feladat:

$$\int \frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx = J \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \coloneqq I\right)$$

Legyen $tgx = t \;\; \Leftrightarrow x = arctgt \;\rightarrow (x)'dx = (arctgt)'dt \rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}dt|_{t=tgx} =: J =$$

$$= \int \frac{1}{1+t}dt|_{t=tgx} = ln(1+tgx) + c \;\; (x \in I, c \in \mathbb{R})$$

10. feladat:

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx = \int \frac{lnx}{x} \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$lnx \coloneqq t \in \mathbb{R} \;\rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \;\rightarrow x = e^t$

$= \int \frac{t}{e^t}dt|_{t=lnx} = \int te^{-t}\,dt|_{t=lnx}$ itt

$$\int te^{-t}\,dt = \int t(-e^{-t})'dt = -te^{-t} — e^{-t}dt = -te^{-t} + \int e^{-t}dt =$$

$$= -te^{-t} - e^{-t} + c = -e^{-t}(t+1) + c \Longrightarrow -e^{-lnx}(lnx+1) + c = -\frac{1}{x}(lnx+1) + c$$

$(x > 0, c \in \mathbb{R})$

11. feladat:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$x \in (-1,1), x = sint \;\rightarrow\; (x)'dx = (sint)'dt \;\rightarrow dx = cost\; dt$$

$$x = sint \;\rightarrow t = arcsinx \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \exists t = arcsinx \Longrightarrow$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2t}\; cost\; dt\; |_{t=arcsinx}$$

Az új integrál:

$$\int \sqrt{cos^2t}\; cost\; dt = \int |cost| cost\; dt = \int cos^2t\; dt =$$

felhasználva a 4. feladatban leírt rekurziós formulát:

$$I_2 = \int cos^2x\; dx = \int \frac{1+cos2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + c$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{sin2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{2sintcost}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{sint\sqrt{1-sin^2t}}{2} + c$$

Beírva t helyére $arcsinx$ –et:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c\; \left(c \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)\right)$$

Megjegyzés:

Ennél a feladatnál a 2-es helyettesítést használtuk:

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)dt\; |_{t=g^{-1}(x)}$$

ha $\exists g^{-1}$+ teljesülnek a tanult tétel alapján a további feltételek (g differenciálható, kompozíció képezhető, $x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x)$)