Analízis 3

Filipp Zoltán gyakorlatai alapján
Készítette: Nagy Krisztián

Gyakorlati módszerek

(Utolsó módosítás: 2014.02.28)

Határozatlan integrál

Hatvány-függvény határozatlan integrálja

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (x \in I, c \in \mathbb{R}) \quad \forall\alpha \neq 1$$

1/x határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c \quad x \in I, c \in \mathbb{R}$$

Megjegyzés: $(x > 0 \to +, x < 0 \to -)$

Lineáris helyettesítés

Tegyük fel, hogy $\int f \neq \emptyset$ és $\int f(x)dx = F(x) + c \Longrightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$
$x \in I \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \in \mathbb{R}$

Fokszám csökkentés – sin/cos-os esetekre

Fontos összefüggések:

$$\left.\begin{aligned} sin^2x + cos^2x &= 1 \\ cos^2x - sin^2x &= cos2x \end{aligned}\right\}$$

Amennyiben az elsőből kivonjuk a másodikat: $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$

Amennyiben összeadjuk a két egyenletet: $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$

A fentebbi formulákat **fokszám csökkentési képleteknek/ linearizáló formuláknak** nevezzük.

Kvadratizáló formula – 1+cosx a nevezőben esetre

$$1 + cosx = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\mathbf{f' \cdot f^{\alpha}}$ alakú határozatlan integrálokra

$$\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c & , \quad \alpha \neq -1 \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln|f(x)| + c & , \quad \alpha = -1 \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Páratlan kitevős sin/cos szorzatára alkalmazható szabály

$\int sin^n x \cdot cos^m x\,dx$ típusú határozatlan integrálok esetén:
Ha n és m közt van páratlan, akkor leválasztunk egyet a páratlan kitevős tényezőből és az $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,dx$ szabályt alkalmazzuk (úgy, hogy a leválasztott tényezőt helyettesítjük azzal, hogy minek a deriváltja.)
Amennyiben n és m is páros, úgy a végsőkig linearizálunk, a formulák segítségével.

Parciális integrálás

Tegyük fel, hogy $f, g: I \to \mathbb{R},\ \emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g \in D$ és $\int fg' \neq \emptyset$.
Ekkor $\int f'g \neq \emptyset \Longrightarrow \int f'g = fg - \int fg'$.

$$\left(\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\right)$$

Polinom · $\{\boldsymbol{exp}, \boldsymbol{sin}, \boldsymbol{cos}, \boldsymbol{sh}, \boldsymbol{ch}\}$ típusú függvény esetén parciális integrálást alkalmazunk, az alábbi szereposztással szereposztás

$\int P(x) \cdot h(ax+b)dx$, ahol $h \in \{exp, sin, cos, sh, ch\}$ és P polinom, akkor a parciális integrálás során használt szereposztás (f, f', g, g') a következő:
$g \coloneqq P \quad f' \coloneqq h(ax+b)$

Inverz-függvények integrálása

Az integrálban egyedül szereplő inverzfügvény (például: ln, arkusz-függvények) készítsünk szorzatot oly módon, hogy vegyünk be egy 1-est a szorzat első tényezőjeként, majd íly módon alkalmazzuk a parciális integrálás tételét az $f' = 1 \ \ g =$inverz függvény szereposztással.

exp· $\{sin, cos, sh, ch\}$**,** $ahol$ $\{sin, cos, sh, ch\}$ elsőfokú

Parciális integrálást válasszunk. Célszerű az exp-et választani deriváltnak, ám az összes parciális integrálás esetén az exp-et kell választanunk ebben az esetben deriváltnak. (Válasszuk mindig ugyan azt a tényezőt deriváltnak).

Amennyiben a többszöri integrálás után, az integrál alatt vissza kapjuk a kiinduló kifejezést, más konstans szorzóval, úgy nevezzük el a kifejezést új változó bevezetéséevel és a létrejövő egyenletet oldjuk meg erre a változóra. Az így kapott eredményt felírva az egyenlet egyik oldalán ott lesz a kezdeti integrálunk, míg a másik oldalon a konstanst hozzáírva megjelenik a megoldása.

$cos^n x, sin^n x$ **eset – rekurziós megoldás**

Páros és páratlan esetre $n = 0$ és $n = 1$ lesz a két ismert kezdőértéke a rekurziónak.
Ezek után parciálisan integráljuk $cos^{n-1}xcosx, sin^{n-1}xsinx$-et. Az így keletkezett integrálban felhasználjuk a Pithagorasz tételt, összegre alakítunk és fel írjuk
I_n $(I_n = \int cos^n x\, dx \;\; vagy \; \int sin^n x dx)$-re a fentebbi módszerben leírt egyenletet. Ott észrevesszük, hogy az egyik integrál vélhetően az I_n a másik alacsonyabb ($\int cos^n x$ esetében I_{n-2}). Beírva ezt, megkapjuk a rekurzív formulát.

<u>Például:</u>

$$I_n := \int cos^n x\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$I_n = \frac{1}{n} cos^{n-1}x\, sinx + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$$

$$I_0 = x + c \;\; I_1 = \; sinx + c \; (x, c \in \mathbb{R})$$

Helyettesítéses integrálás – 1-es helyettesítéssel

$(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g'$, ha most $F \in \int f \neq \emptyset$, azaz $F' = f \Longrightarrow (F \circ g)' = f \circ g \cdot g' \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int (F \circ g)' = \int f \circ g \cdot g' \Longrightarrow F \circ g = \int f \circ g \cdot g'$ vagy
$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x) dx = F\big(g(x)\big) + c$, ahol $F \in \int f$ egy olyan primitív <u>függvény, amit ismerünk</u>!
$(g \in D \quad g: J \to I \quad f: I \to \mathbb{R})$

Helyettesítéses integrálás – 2-es helyettesítéssel

$$\int f(x) dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) dt \,|_{t=g^{-1}(x)}$$

ha $\exists g^{-1}$+ teljesülnek a tanult tétel alapján a további feltételek (g differenciálható, kompozíció képezhető, $x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x)$)