Analízis 3

Weisz Ferenc előadása alapján
Készítette: Nagy Krisztián

Vizsgakérdések 1. rész

1.Definiálja a metrikus teret

Legyen $M \neq \emptyset$ halmaz. Az (M, ρ) párt metrikus térnek nevezzük, ha $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ és

1.) $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in M$
2.) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3.) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall x, y \in M$ (szimmetria)
4.) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$ (háromszög egyenlőtlenség)

ρ a metrika, $\rho(x, y)$ az x és y távolsága.

2. Hogyan értelmezzük az $(\mathbb{R}^2, \boldsymbol{\rho_2})$ metrikus teret

$x, y \in \mathbb{R}^2$, ekkor $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad x = (x_1, x_2) \ \ y = (y_1, y_2)$

Tulajdonságai

1.) $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$
2.) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3.) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ (szimmetria)
4.) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ (háromszög egyenlőtlenség)

3. Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget

$a_i, b_i \in \mathbb{R}^n \ \ i = 1, \dots, n$ Ekkor $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \ =\!\!\iff$
$b_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ vagy $\exists \lambda \in \mathbb{R}: a_i = \lambda b_i \ \ \forall i = 1, \dots, n$

4. Írja le a Normált tér definícióját

$(X, \|.\|)$ normált-tér, ha

1.) X lineáris vektortér $\mathbb{R}$ felett
2.) $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ és
   a. $\|x\| \geq 0 \qquad \forall x \in X$
   b. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
   c. $\|x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X$
   d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

5. Definiálja $\mathbb{R}^n$-en a $\|.\|_2$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *normát*

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, normált tér és $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ekkor $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

6. Hogyan értelmezzük az $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált térben egy pont környezetét?

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér, $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < r\}$ az a r-sugarú környezete, vagy az a középű r-sugarú nyílt gömb.

7. Mit jelent az, hogy egy $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$-beli sorozat konvergens?

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ vektorsorozat konvergens, ha $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0 : \|a_k - \alpha\|_2 < \varepsilon$.
Jelölés: $\alpha = lim a_k$, $a_k \to \alpha$ α a határérték.

8. Milyen ekvivalens állításokat ismer normált térbeli sorozat konvergenciájára?

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1.) (a_k) konvergens
2.) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0 \quad a_k \in K_\varepsilon(\alpha)$
3.) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, lim\|a_k - \alpha\|_2 = 0$

9. Fogalmazza meg a normált térbeli konvergens sorozatok alaptulajdonságait.

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

1.) Ha (a_k) konvergens és $lim(a_k) = \alpha$, akkor
   a. α egyértelmű
   b. α korlátos
   c. $\forall \vartheta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ index-sorozatra $lim\ a_{\vartheta(k)} = \alpha$
2.) ϑ_1 és ϑ_2 index-sorozat, ha $lim\ a_{\vartheta_1(k)} \neq lim\ a_{\vartheta_2(k)}$, akkor (a_k) divergens

10. Milyen műveleti tételeket ismer normált térbeli konvergens sorozatokra?

Legyen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ normált-tér. Az $(a_k), (b_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergensek
$\alpha = \lim a_k$, $\beta = \lim b_k$. Ekkor:

1.) $(a_k + b_k)$ konvergens és $lim(a_k + b_k) = \alpha + \beta$
2.) (λa_k) konvergens és $lim(\lambda a_k) = \lambda \cdot \alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

11. Hogyan jellemezhető $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciája a koordinátasorozatokkal?

Legyen $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$
$\alpha = \left(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$

12. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat Cauchy-sorozat?

Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l > k_0: \|a_k - a_l\| < \varepsilon$

13. Milyen kapcsolat van normált térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok között?

$(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy-sorozat

14. Definiálja a torlódási pont fogalmát.

$A \subset \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$ az A torlódási pontja, ha $\forall K(a)$-ra $K(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$
Jelölés: A' a torlódási pontok halmaza.

15. Milyen ekvivalens állításokat ismer a torlódási pontról?

$a \in A' \Leftrightarrow \forall K(a)$ $K(a) \cap A$ végtelen halmaz $\Leftrightarrow$ $\exists (a_k): \mathbb{N} \to A$ injektív, hogy $\lim a_k = a$

16. Definiálja a belső pont fogalmát.

$a \in \mathbb{R}^n$ belső pontja A-nak, ha $\exists K(a) \subset A \subset \mathbb{R}^n$

17. Mi a nyílt halmaz definíciója?

A nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont

18. Milyen állításokat ismer zárt halmaz jellemzésére?

1.) $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow A' \subset A$
2.) $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow$ $\forall (a_k): \mathbb{N} \to A$ és konvergens sorozatra $\lim a_k = \alpha \in A$

19. Fogalmazza meg a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt.

Ha $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ korlátos, akkor kiválasztható egy $(a_k) \circ \vartheta = \left(a_{\vartheta_k}\right)$ konvergens részsorozat.

20. Definiálja normált terek közötti leképezések határértékét.

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ $a \in D_f'$ f-nek $\exists$ határértéke, ha $\exists A \in \mathbb{R}^m$,
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} \cap D_f: f(x) \in K_\varepsilon(A)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < \|x - a\| < \delta: \|f(x) - A\| < \varepsilon$

21. Definiálja normált terek közötti leképezések pontbeli folytonosságát.

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f: f(x) \in K_\varepsilon\big(f(a)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x \in D_f: \|x - a\| < \delta: \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

22. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in D_f$.Ekkor $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_k): \mathbb{N} \to D_f: lim(x_k) = a: lim\big(f(x_k)\big) = f(a)$

23. Mit tud a korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

Ha $f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ folytonos és D_f korlátos és zárt, akkor R_f is korlátos és zárt.

24. Mondja ki a Weierstrass-tételt.

$f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ folytonos, D_f korlátos és zárt, akkor $\exists maxf, \exists minf$

25. Mit tud a korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény inverzéről?

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos, D_f korlátos és zárt és f injektív, akkor f^{-1} folytonos

26. Definiálja az egyenletes folytonosságot.

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egyenletesen folytonos, ha
$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, \forall x, y \in D_f: \|x - y\| < \delta: \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

27. Mondja ki a Heine-tételt.

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos, D_f korlátos és zárt, akkor f egyenletesen folytonos.

28. Mi a kontrakció definíciója?

$X \subset \mathbb{R}^n, f: X \to X$ kontrakció, ha $\exists 0 \leq q < 1: \|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$:
$\forall x, y \in X$

29. Fogalmazza meg a Banach-féle fixpont-tételt.

$X \subset \mathbb{R}^n, f: X \to X$ kontrakció, X zárt. Ekkor

1.) f-nek $\exists!$ fixpontja, azaz $\exists! \, x^* \in X: f(x^*) = x^*$
2.) Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, $x_{n+1} \coloneqq f(x_n)$, akkor az $(x_n): \mathbb{N} \to X$ konvergens és $\lim x_n = x^*$
3.) $\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|, n \in \mathbb{N}$

30. Mit jelent az, hogy egy L:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris?

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, ha $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jelölés: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

31. Milyen normát értelmeztünk lineáris leképeésekre?

Az $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operátornormája: $\big|\|L\|\big| \coloneqq sup\{|L(h)|: \|h\| \leq 1\}$

32. Milyen egyenlőtlenséget ismer lineáris leképezések normájára?

$|L(h)| \leq \left||L|\right| \cdot \|h\|, h \in \mathbb{R}^n$

33. Írja le az $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ függvény pontbéli (totális) deriválhatóságának a definícióját.

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deriválható az $a \in intD_f$ pontban, ha $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

34. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_f \;\; f \in D(a) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \exists \varepsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0: f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$

Ekkor $L = f'(a)$

35. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra mátrixokkal?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in intD_f \;\; f \in D(a) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}: \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} = 0.$ Ekkor $A = f'(a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \exists \varepsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim\limits_{0} \varepsilon = 0: f(a+h) - f(a) = A(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$